Feuille 4 : Compacité

Échauffement

Exercice 1 (Exemples concrets). Lesquels des sous-ensembles suivants sont compacts ?

$$C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}, \quad C_2 := \mathbb{Q} \cap [0,1], \quad C_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ y = x^2\},$$

$$C_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 1/x\}.$$

Exercice 2 (Recouvrements). Soit $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle.

a) Montrer que X est compact en utilisant la définition par les recouvrements ouverts.

b) Donner un recouvrement ouvert de $[0,1[$ qui n'admet pas de sous-recouvrement fini.

Exercice 3. Soit $\mathbb{Q}$ muni de la métrique usuelle et $S = \{r \in \mathbb{Q} : 2 < r^2 < 3\}$. Montrer que S est fermé et borné dans $\mathbb{Q}$ mais n'est pas compact.

Exercice 4 (Compact et topologie induite). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $K \subset A \subset X$.

Montrer que K est compact dans A (muni de la topologie induite) $\iff$ K est compact dans X.

Exercices

Exercice 5 (Autour du lemme des fermés emboîtés). Soit $(X, \mathcal{T})$ compact et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides :

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots .$$

Alors $\bigcap_{n\geq 0} F_n \neq \emptyset$.

a) Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse de compacité ? Donner un contre-exemple si non.

Soit maintenant $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ pas nécessairement compact.

b) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\geq 0} K_n \neq \emptyset$.

c) Montrer que pour tout ouvert $O \in \mathcal{T}$ contenant $\bigcap_n K_n$, il existe n_0 tel que $K_{n_0} \subset O$.

Exercice 6. Soit A compact dans un espace métrique (X, d). Montrer qu'il existe $x, y \in A$ tels que

$$d(x,y) = \operatorname{diam}(A) := \sup\{d(u,v) : u, v \in A\}.$$

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est précompact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, X peut-être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.
Montrer que X est compact si et seulement si X est précompact et complet.

Exercice 8. Soit K une partie fermée et bornée d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$.

a) Montrer que si E est de dimension infinie et K compact alors K est d'intérieure vide.

b) Montrer que K est compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel F_ε de dimension finie telle que

$$\forall x \in K, \quad d(x, F_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Indication : utiliser l'exercice précédent.

c) Exemple, montrer que dans $\ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ avec sa norme usuelle, le sous-ensemble suivant est compact :

$$A = \left\{ x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : \ |x(n)| \leq \frac{1}{n+1} \ \forall n \right\}$$

Exercice 9. Soit K un compact métrique et $f \colon K \mapsto K$ vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y) \text{ si } x \neq y.$$

Montrer que f possède un unique point fixe et que pour tout $x_0 \in K$ la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers le point fixe.

Exercice 10 (Dini équicontinu). Soient (X, d) compact métrique et (X', d') métrique. Supposons $(f_n) \subset C^0(X, X')$ équicontinue, c'est-à-dire que

$$\forall x_0 \in X, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_{x_0} > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) \leq \delta_{x_0} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ d'(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \varepsilon.$$

On suppose de plus que $f_n \to f \in C^0(X, X')$ simplement. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 11 (Compactification par un point (Alexandroff)). Soit $(X, \mathcal{T})$ séparé et localement compact. C'est à dire tout point admet une base de voisinages compacts. On pose $X' = X \cup \{\infty\}$ et on munit X' de la topologie $\mathcal{T}'$ telle qu'une base de voisinages de l'infini est donnée par les ensembles

$$(X \setminus K) \cup \{\infty\}, \quad K \subset X \text{ compact}.$$

Les voisinages des points de X sont ceux définis par la topologie $\mathcal{T}$.

a) Vérifier que $(X', \mathcal{T}')$ est compact (on pensera à vérifier que c'est un espace séparé ![1]).

b) Montrer que si $(X, \mathcal{T})$ n'est pas déjà compact, alors c'est un sous-espace dense de $(X', \mathcal{T}')$.

c) Décrire explicitement la compactification par un point de $\mathbb{R}$.

Compléments

1. L'hypothèse de *locale compacité* sert précisément à assurer cette propriété là...

Exercice 12 (Version affaiblie du théorème d'Ascoli). Soit (K,d) un espace métrique compact et A une partie de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. On dit que A est équicontinue si

$$\forall x_0 \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in X, d(x,x_0) \leq \delta \Rightarrow \forall f \in A,\ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

et on dit que A est uniformément équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x,y \in X, d(x,y) \leq \delta \Rightarrow \forall f \in A,\ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

On suppose A bornée et équicontinue montrons qu'elle est relativement compacte, c'est à dire que $\overline{A}$ est compact.

a) Montrer que A est uniformément équicontinue.

b) Montrer que $\overline{A}$ est uniformément équicontinue.

c) Montrer le résultat en utilisant l'exercice 8.
Indication :On pourra utiliser le résultat suivant. Soit $(O_i)_{1\leq i \leq n}$ *une famille d'ouvert non vides recouvrant* K*. Alors il existe* $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ *tel que :*

1. $\forall j \in \{1,\dots,N\}\,,\ \varphi_j \geq 0$ *sur* K*,*
2. $\forall x \in K,\ \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) = 1,$
3. $\forall j \in \{1,\dots,N\}\,,\ \forall x \in K \setminus O_j,\ \varphi_j(x) = 0.$

d) Montrer l'indication.

Exercice 13 (Fonction α-hölderiennes). Pour $\alpha \in]0,1]$, on note $\mathcal{C}^\alpha([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions α-höldériennes, c'est à dire les fonctions f tel qu'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha.$$

On définit alors sur cette espace,

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\ x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Montrer que la boule unité fermé de $\mathcal{C}^\alpha([0,1],\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\alpha$ est compact dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 14 (Opérateur à noyeau). Soit $K \in \mathcal{C}([0,1]\times[0,1])$, on définit un opérateur linéaire $T\colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ par

$$\forall x \in [0,1],\quad T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Montrer que T est continue et que T est un opérateur compact. C'est-à-dire que l'image par T de la boule unité fermé de $\mathcal{C}([0,1])$ est relativement compact, *i.e* son adhérence est compact.

On énonce le théorème de Tychonoff que l'on va utiliser dans les prochains exercices.

Théorème 1 (Tychonoff)**.** *Un produit d'espaces topologiques compacts est compact pour la topologie produit.*

Exercice 15 (Tychonoff et extraction de sous-suite). On note $\ell^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{F}_b(\mathbb{N};\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles bornées.

a) Montrer que de toute suite bornée $(f_n) \subset \ell^\infty(\mathbb{R})$ on peut extraire une sous-suite (f_{n_k}) qui converge simplement sur $\mathbb{N}$.

On considère dans $\mathcal{F}_b([0,1];\mathbb{R})$ la suite (f_n) des fonctions caractéristiques des ensembles

$$A_n = \bigcup_{p=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2p-1}{2^n}, \frac{2p}{2^n}\right].$$

b) En utilisant l'écriture dyadique, montrer qu'on ne peut extraire aucune sous-suite simplement convergente.

c) En déduire que la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{F}_b([0,1];\mathbb{R})$ n'est pas séquentiellement compacte, c'est-à-dire ne vérifie pas la propriété de Bolzano-Weierstrass (et n'est pas métrisable).

Exercice 16 (Preuve de Tychonoff). Nous démontrons le théorème de Tychonoff dans le cas d'un produit de deux espaces topologiques. Considérons $(X,\mathcal{T})$ et $(X',\mathcal{T}')$ deux espaces topologiques compacts. L'espace produit $X \times X'$ est muni de la topologie produit $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$. Fixons $x \in X$, et considérons l'injection

$$\begin{array}{rccc} i_x : & X' & \longrightarrow & X \times X' \\ & x' & \longmapsto & (x,x') \,. \end{array}$$

a) Montrer que i_x est continue, puis que $\{x\} \times X'$ est compact.

Soit maintenant $U \subset X \times X'$ un ouvert tel que

$$\{x\} \times X' \subset U.$$

b) On note $\mathcal{V}(x)$ (resp. $\mathcal{V}(x')$) la famille des voisinages de x (resp. x'). Montrer que pour tout $x' \in X'$, il existe

$$V_{(x,x')} \in \mathcal{V}(x) \quad \text{et} \quad W_{(x,x')} \in \mathcal{V}(x')$$

tels que

$$(x,x') \in V_{(x,x')} \times W_{(x,x')} \subset U.$$

c) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des points $x'_1, \ldots, x'_n \in X'$ tels que

$$X' = \bigcup_{k=1}^{n} W_{(x,x'_k)}.$$

Posons alors

$$V_x := \bigcap_{k=1}^{n} V_{(x,x'_k)}.$$

d) Montrer que $V_x \times X' \subset U$.

Nous venons ainsi de démontrer le **Lemme des tubes** :

Si $x \in X$ et $U \subset X \times X'$ est un ouvert tel que $\{x\} \times X' \subset U$, alors il existe un voisinage ouvert $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tel que

$$V_x \times X' \subset U.$$

e) En exploitant ce lemme ainsi que la compacité de $\{x\} \times X'$ pour tout $x \in X$, montrer que $X \times X'$ satisfait la propriété de *Borel–Lebesgue* (et donc est compact, en admettant qu'on sait déjà montrer qu'il est séparé).